Μετρικοί χώροι και η Τοπολογία τους, 13/6/2024, Α. Τόλιας

Θέμα 1. (2 μον.)

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Να δείξετε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(Α) Ο μετρικός χώρος (X, ρ) είναι πλήρης.

(Β) Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του X, με $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$ ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Θέμα 2. (6 μον.)

Να εξετάσετε, με πλήρη αιτιολόγηση, αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. (Για όσες είναι αληθείς να γράψετε την πλήρη απόδειξη, ενώ για όσες είναι ψευδείς να βρείτε κατάλληλο αντιπαράδειγμα).

(Α) Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και $(A_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X, τότε το σύνολο $\bigcup_{i\in I} A_i$ είναι ανοικτό.

(Β) Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και $(B_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X, τότε το σύνολο $\bigcup_{i\in I} B_i$ είναι κλειστό.

(Γ) Αν (X, ρ), (Y, d) είναι δυο μετρικοί χώροι, $f : X \to Y$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και Λ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του Y τότε το $f^{-1}(\Lambda)$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X.

(Δ) Αν (X, ρ), (Y, d) είναι δυο μετρικοί χώροι, $f : X \to Y$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και K είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X τότε το $f(K)$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του Y.

(Ε) Αν (X, ρ), (Y, d) είναι δυο μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ είναι μια συνεχής συνάρτηση η οποία είναι $1-1$ και επί, τότε η $f^{-1} : Y \to X$ είναι συνεχής.

(ΣΤ) Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και A είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του X τότε το A είναι κλειστό.

Θέμα 3. (2 μον.)

Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με την ευκλείδεια μετρική και τις προβολές π_1, π_2 στην πρώτη και τη δεύτερη συντεταγμένη αντίστοιχα (δηλ. $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $\pi_1(x, y) = x$ και $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $\pi_1(x, y) = y$). Αν AB είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του Αριθμού Μητρώου σας με το εκατό (δηλ. B το τελευταίο ψηφίο και A το προτελευταίο ψηφίο του Αριθμού Μητρώου σας) θέτουμε $M = A + 2$ και $N = B + 12$. Να βρείτε ένα υποσύνολο K του $\mathbb{R}^2$ ώστε το K να έχει τις έξής ιδιότητες:

(α) Το K έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες (και άρα δεν είναι συνεκτικό) .

(β) Το $\pi_1(K)$ είναι συνεκτικό, δεν είναι κάτω φραγμένο, είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $\sup \pi_1(K) = M$.

(γ) Το $\pi_2(K)$ είναι συνεκτικό, δεν είναι άνω φραγμένο, είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $\inf \pi_1(K) = -N$.

(δ) $K^o = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\}$.

(ε) Το σημείο $(-N, M)$ ανήκει στο σύνολο K' (δηλαδή είναι σημείο συσσώρευσης του K) αλλά δεν ανήκει στο K.

(Σημείωση: Η λύση για ένα φοιτητή που έχει αριθμό μητρώου π.χ. 17832 θα ξεκινά ώς εξής: $A = 3$ και $B = 2$, άρα $M = 5$ και $N = 14$. Οι λύσεις δεν πρέπει να περιέχουν τα σύμβολα M και N παρά μόνο τους αριθμούς στους οποίους αντιστοιχούν.)

Καλή Επιτυχία!